

ktu

kauno
technologijos
universitetas

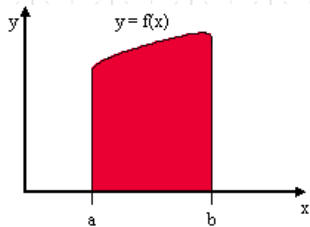
1922

8 PASKAITA

2017METAI

APIBRĖŽTINIO INTEGRALO TAIKYMAS (PLOTO SKAIČIAVIMAS)

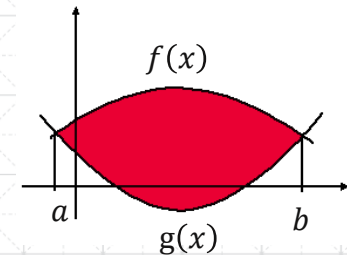
Kreivinės trapecijos, apribotos f -jos $f(x) \geq 0$ grafiku, abscisių ašies (Ox) ir tiesių $x = a, x = b$ plotas



$$S = \int_a^b f(x) dx$$

Jei figūrą riboja dviejų f -jų $y = f(x)$ ir $y = g(x)$ ($f(x) \geq g(x), a \leq x \leq b$) grafikai, tai jos plotas

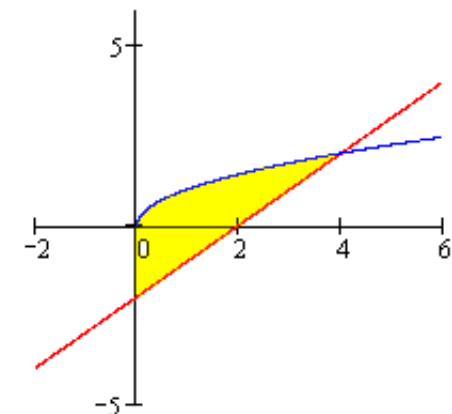
$$S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$



1 Užduotis.

Apskaičiuokite figūros, kurią riboja kreivės

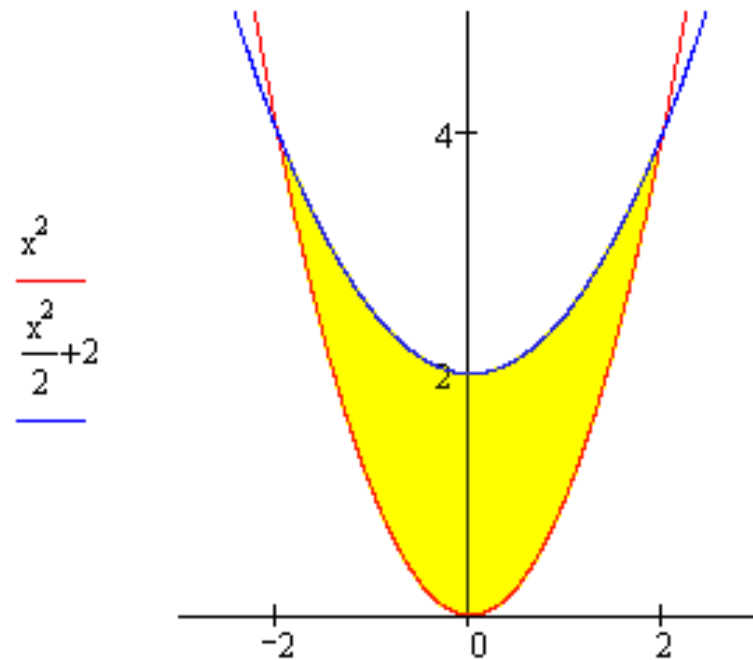
$y = \sqrt{x}$, $y = x - 2$, $x = 0$, plotą.

 $\frac{x-2}{\sqrt{x}}$
 \sqrt{x}


PLOTO SKAIČIAVIMAS

2 Užduotis. Apskaičiuokite plotą figūros, apribotos kreivėmis

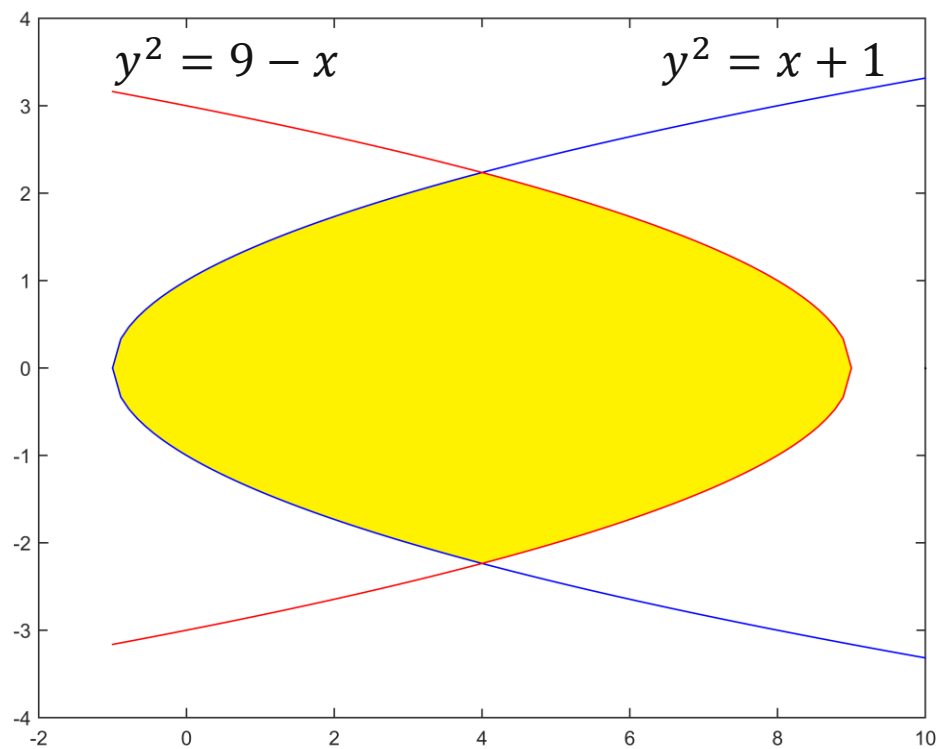
$$y = x^2 \text{ ir } y = \frac{x^2}{2} + 2.$$



PLOTO SKAIČIAVIMAS

3 Užduotis. Apskaičiuokite figūros plotą, apribotą kreivėmis

$$y^2 = x + 1 \text{ ir } y^2 = 9 - x.$$



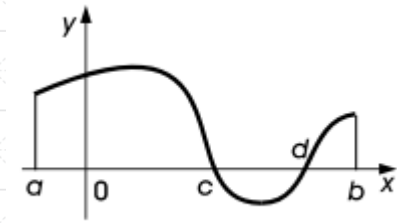
PLOTO SKAIČIAVIMAS

Jeigu $f(x) \leq 0$ atkarpoje $[a, b]$, tai $\int_a^b f(x)dx \leq 0$, tačiau jo modulis lygus figūros plotui. Todėl

$$S = -\int_a^b f(x)dx$$

Kai $f(x)$ atkarpoje $[a, b]$ kelis kartus keičia ženklą (7 pav.), tai atkarpą $[a, b]$ išskaidome į atkarpas $[a, c]$, $[c, d]$, $[d, b]$ ir apskaičiuojame kiekvienos dalies plotą. Įvertinę integralų ženklus, gauname:

$$S = \int_a^c f(x)dx - \int_c^d f(x)dx + \int_d^b f(x)dx$$



7 pav.

4 Užduotis. Apskaičiuokite figūros, kurią riboja duotoji kreivė, plotą:

$$y = \cos x, \quad x \in [0; \pi]$$

PLOTO SKAIČIAVIMAS

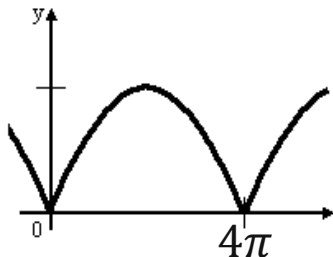
Jei kreivė duota parametrinėmis lygtimis $x = x(t), y = y(t)$ čia $t \in [t_1; t_2]$, tai kreivinės trapecijos, apribotos šios kreivės, abscisių ašies (Ox) ir tiesių $x = a, x = b$, plotas

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot x'(t) \cdot dt$$

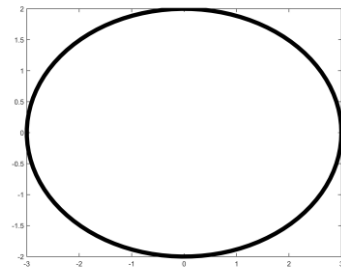
Rėžiai t_1 ir t_2 randami iš lygčių $a = x(t_1), b = x(t_2)$ ($y(t) \geq 0$, kai $t \in [t_1; t_2]$)

5 Uždutis. Apskaičiuokite figūrų, kurias riboja kreivės plotą:

a)
$$\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases} t \in [0, 2\pi]$$



b)
$$\begin{cases} x = 3 \cos t \\ y = 2 \sin t \end{cases}$$



Parametrinės lygtis:

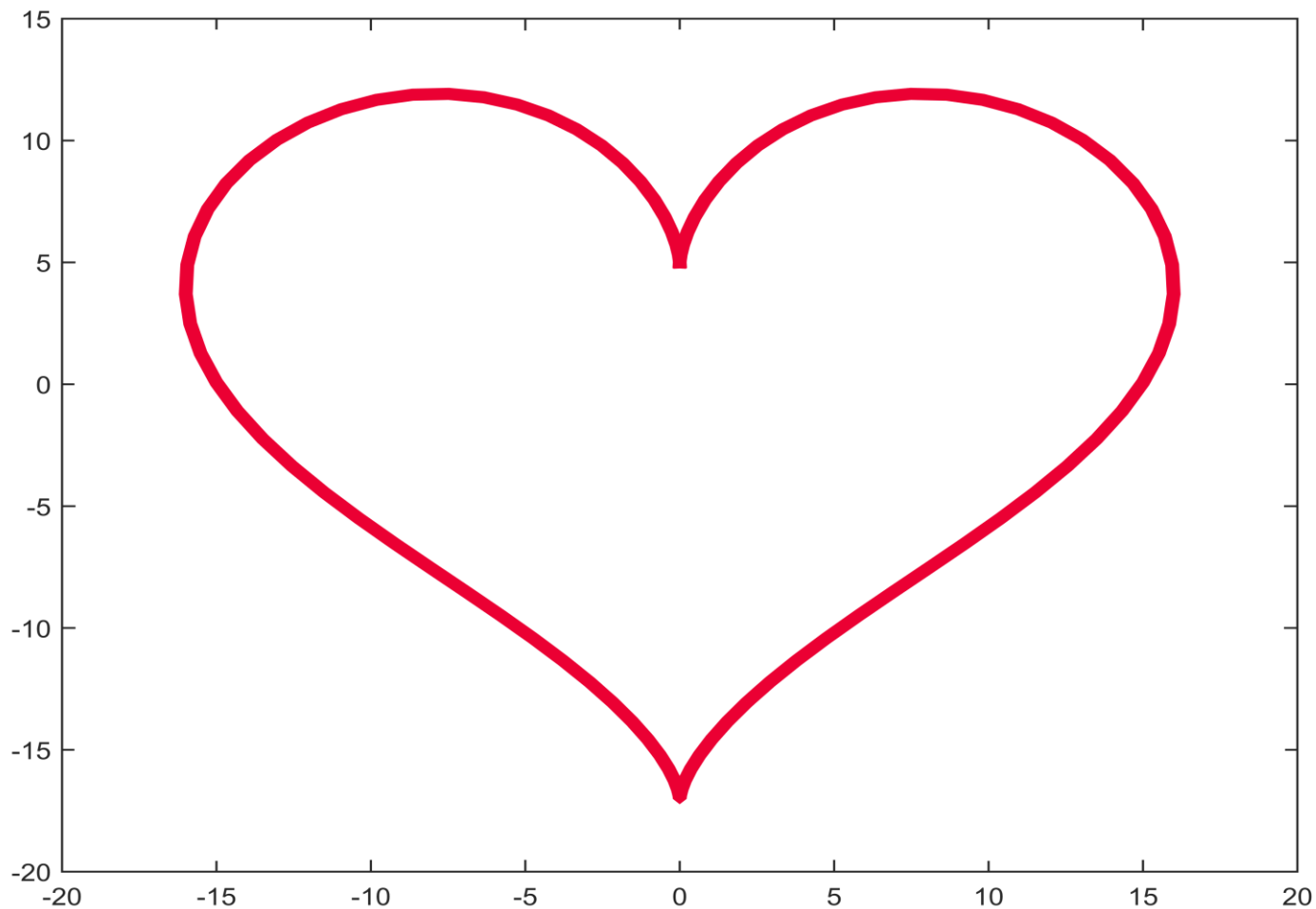
- Elipsė (Apskritimas)
- Cikloidė
- Astroidė
- Kardioidė
- Kilpa

ktu

kauno
technologijos
universitetas

1922

APIBRĖŽTINIO INTEGRALO TAIKYMAS



Šitos širdelės parametrinės lygtys:

$$\begin{cases} x = 16\sin^3 t \\ y = 13\cos t - 5\cos(2t) - 2\cos(3t) - \cos(4t), \end{cases}$$

Gal kas išdrįs apskaičiuoti jos plotą 😊?

KREIVĖS LANKO ILGIO SKAIČIAVIMAS

- kreivės $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ lanko ilgis stačiakampėje koordinatinių sistemoje

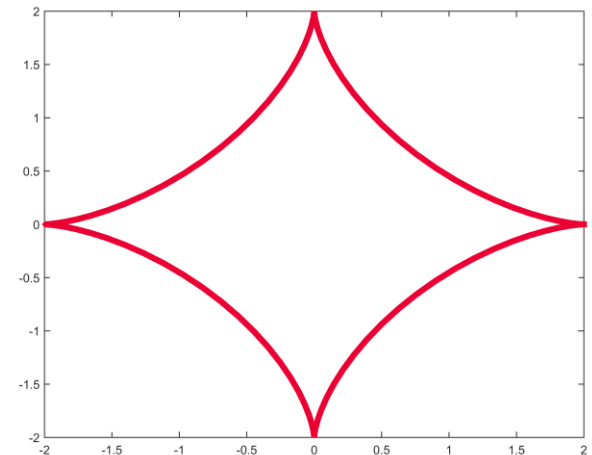
$$L = \int_a^b \sqrt{1 + y_x'^2} dx$$

- kreivės $x = x(t), y = y(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$ (kreivė išreikšta parametrinėmis lygtimis - praktikoje dažniausia)

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} dt$$

6 Užduotis. Apskaičiuoti astroidės ilgį

$$\begin{cases} x = 2 \cos^3 t \\ y = 2 \sin^3 t \end{cases}$$



SUKINIO TŪRIO SKAIČIAVIMAS

- Jei kreivinė trapecija, apribota kreivės $y = f(x)$ ir tiesių $y = 0, x = a, x = b$, sukama apie Ox ašį, tai gauto sukinio tūris lygus:

$$V_{Ox} = \pi \int_a^b y^2 dx$$

- Jei kreivinė trapecija, apribota kreivėmis $y = f(x)$ ir tiesių $y = 0, x = a, x = b$, sukama apie Oy ašį, tai gauto sukinio tūris lygus:

$$V_{Oy} = 2\pi \int_a^b xy dx$$

7 Užduotis. Apskaičiuokite tūrį sukinio, kuris gaunamas duotų kreivių apribotą figūrą sukant $y = 2x - x^2, y = 0$ apie Ox ašį (apie Oy ašį).

SUKINIO TŪRIO SKAIČIAVIMAS

- Jei figūra, apribota kreivėmis $x = g(y)$ ir tiesių $x = 0, y = c, y = d$, sukama apie Ox ašį, tai sukinio tūris lygus:

$$V_{Ox} = 2\pi \int_c^d xy dy$$

- Jei figūra, apribota kreivėmis $x = g(y)$ ir tiesių $x = 0, y = c, y = d$, sukama apie Oy ašį, tai gauto sukinio tūris lygus:

$$V_{Oy} = \pi \int_c^d x^2 dy$$

8 Užduotis. Apskaičiuokite tūrį sukinio, kuris gaunamas duotų kreivių apribotą figūrą sukant $x = \sqrt{4 - y}, 0 \leq y \leq 4$ apie Ox ašį (apie Oy ašį).

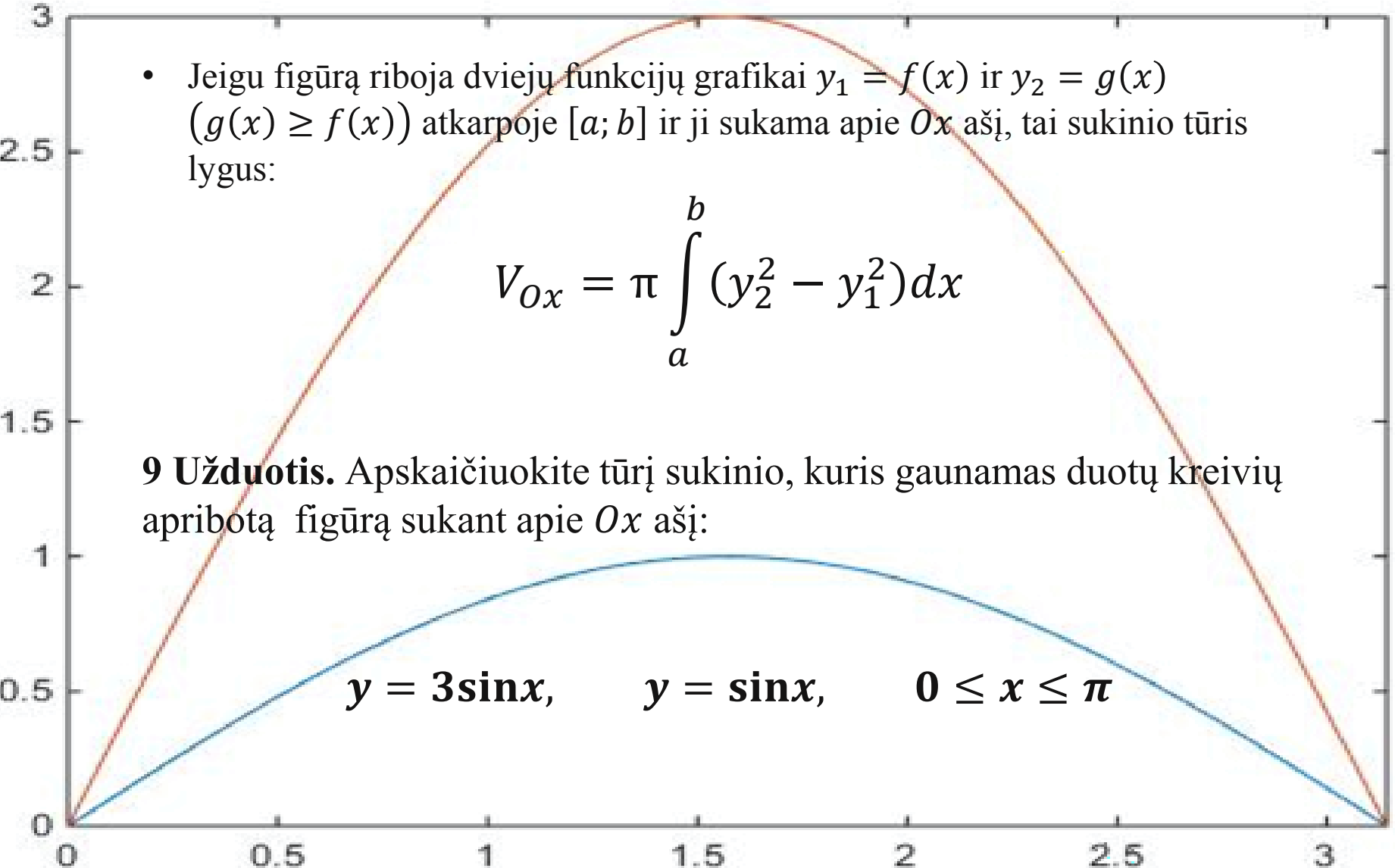
SUKINIO TŪRIO SKAIČIAVIMAS

- Jeigu figūrą riboja dviejų funkcijų grafikai $y_1 = f(x)$ ir $y_2 = g(x)$ ($g(x) \geq f(x)$) atkarpoje $[a; b]$ ir ji sukama apie Ox ašį, tai sukinio tūris lygus:

$$V_{Ox} = \pi \int_a^b (y_2^2 - y_1^2) dx$$

9 Užduotis. Apskaičiuokite tūrį sukinio, kuris gaunamas duotų kreivių apribotą figūrą sukant apie Ox ašį:

$$y = 3\sin x, \quad y = \sin x, \quad 0 \leq x \leq \pi$$



ktu

kauno
technologijos
universitetas

1922

MEDŽIAGA GALIMA RASTI:
WWW.TANY.LT/STUD
MATEMATIKA2

PARENGĖ: TATJANA SIDEKERSKIENE
E-MAIL: TATJANA.SIDEKERSKIENE@KTU.LT