

ktu

kauno
technologijos
universitetas

1922

11 PASKAITA

2017METAI

DVILYPIS INTEGRALAS POLINĖJE KOORDINAČIŲ SISTEMOJE.

Dvilypio integralo pertvarkymas iš stačiakampių koordinačių x ir y į polines koordinates ρ ir φ kurios susietos lygtimis $x = \rho \cdot \cos \varphi$, $y = \rho \cdot \sin \varphi$ yra atitinkamas pagal formulę:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho d\varphi$$

1. Apskaičiuoti $\iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2} dx dy$, kai sritis D yra skritulys su centru

koordinačių pradžioje ir spinduliu $R = 1$.

ATS: $\frac{2}{3}\pi$

2. Apskaičiuoti $\iint_D \arctg\left(\frac{y}{x}\right) dx dy$, kai sritis

$$D: x^2 + y^2 \geq 1, x^2 + y^2 \leq 9,$$

ATS: $\frac{\pi^2}{6}$

$$\frac{1}{\sqrt{3}}x \leq y \leq \sqrt{3}x$$

DVILYPIŠ INTEGRALAS POLINĖJE KOORDINAČIŲ SISTEMOJE.

3. Apskaičiuoti $\iint_D \arctg\left(\frac{y}{x}\right) dx dy$, kai sritis

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0, x > 0\}$$

ATS: $(\pi^2)/4$

4. Apskaičiuoti $\iint_D (2x + 2y) dx dy$, kai sritis

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

ATS: 0

DVILYPIS INTEGRALAS POLINĖJE KOORDINAČIŲ SISTEMOJE.

5. Apskaičiuoti $\iint_D \frac{\sin \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy$, kai sritis

$$D = \{(x, y) \mid \pi^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\pi^2\}$$

ATS: -4π

DVILYPIŲ INTEGRALŲ TAIKYMAI

Geometrijoje: plokščios figūros plotas $S = \iint_D dx dy$

1 Užd. Apskaičiuokite figūros plotą , apribotą kreivėmis:

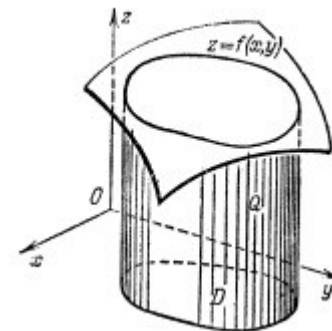
$$x = 2, \quad y = x, \quad xy = 1$$

2 Užd. Apskaičiuokite figūros plotą , apribotą kreivėmis:

$$x + y = 6, \quad y = 0, \quad x = \sqrt{y}$$

DVILYPIŲ INTEGRALŲ TAIKYMAI

Kūno tūris (cilindro) :
$$V = \iint_D f(x, y) dx dy$$



Kai kūną iš viršaus riboja paviršius $f(x, y)$, iš apačios to paviršiaus projekcija xOy plokštumoje - sritis D , iš šonų – cilindrinio paviršiaus, kurio sudaromosios lygiagrečiai Oz ašiai.

3 Užd. Kūno, apriboto plokštumų $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = 3$, $y = 3$ ir paraboloido $z = x^2 + y^2 + 2$ tūris lygus?

ATS: 72.

DVILYPIŲ INTEGRALŲ TAIKYMAI

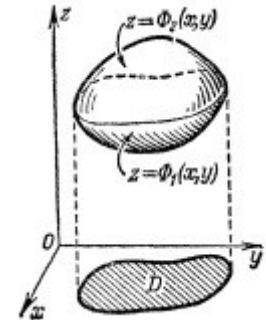
Kūno tūris, kai yra du paviršiai:

Kai kūną riboja iš viršaus paviršiaus $z = z_2(x, y)$;

iš apačios $z = z_1(x, y)$;

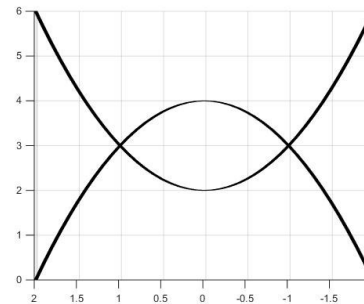
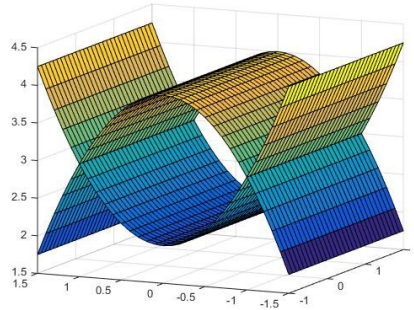
iš šonų - cilindrinis paviršius, kurio sudaromosios $\parallel Oz$;

sritės D – kūno projekcija xOy , plokštumoje $z_2(x, y) \geq z_1(x, y)$, $\forall (x, y) \in D$.



$$V = \iint_D (z_2 - z_1) dx dy$$

4 Užd. Kūno, apriboto paviršių $z = 4 - y^2$, $z = y^2 + 2$, $x = -1$, $x = 2$ tūris lygus:



ATS: 8

Plokščios figūros masė

$$m = \iint_D p(x, y) dx dy, \quad \text{čia } p - \text{ tankis}$$

5 Užd. Plokštelė, kurios medžiagos tankis $p(x, y) = x$, apribota apskritimo $x^2 + y^2 = 2x$ lanko ($y \geq 0$) ir Ox ašies. Jos masė lygi?

ATS: $\pi/2$

Svorio centro koordinatės

$$x_c = \frac{1}{m} \iint_D x p(x, y) dx dy, \quad y_c = \frac{1}{m} \iint_D y p(x, y) dx dy,$$

Inercijos momentai

$$I_O = \iint_D (x^2 + y^2) p(x, y) dx dy,$$

$$I_x = \iint_D y^2 p(x, y) dx dy, \quad I_y = \iint_D x^2 p(x, y) dx dy,$$

Paviršiaus plotų skaičiavimas :

$$S = \iint_D \sqrt{1 + f_x'^2(x, y) + f_y'^2(x, y)} dx dy$$

ktu

kauno
technologijos
universitetas

1922

MEDŽIAGA GALIMA RASTI:
WWW.TANY.LT/STUD
MATEMATIKA2

PARENGĖ: TATJANA SIDEKERSKIENE
E-MAIL: TATJANA.SIDEKERSKIENE@KTU.LT