

ktu

kauno
technologijos
universitetas

1922

7 PASKAITA

2015METAI

APIBRĖŽTINIO INTEGRALO GEOMETRINĖ PRASMĖ

Apibrėžtinio integralo geometrinė prasmė:

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

kreivinės trapecijos plotas;

čia a ir b – apatinis ir viršutinis rėžiai.

$f(x)$ yra tolydi atkarpoje $[a, b]$ integruojama funkcija.

APIBRĖŽTINIO INTEGRALO SAVYBĖS

Jei $f(x)$ ir $g(x)$ integruojamos atkarpoje $[a, b]$, tai:

- $$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

- $$\int_a^a f(x) dx = 0$$

- $$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

APIBRĖŽTINIO INTEGRALO SAVYBĖS

- $$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

- Jei $f(x) \geq 0$ atkarpoje $[a, b]$, tai

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

- Jei $f(x) \geq g(x)$, tai

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

APIBRĖŽTINIO INTEGRALO SAVYBĖS

- **Apibrėžtinio integralo įvertis.**

Tarkime, kad $m = \min_{x \in [a, b]} f(x)$ ir $M = \max_{x \in [a, b]} f(x)$, $x \in [a, b]$.

Tada

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a)$$

Užduotis. Apskaičiuokite integralo įvertį, kai $f(x) = \sqrt{9 + x^4}$ intervale $[0; 2]$.

APIBRĖŽTINIO INTEGRALO SKAIČIAVIMAS

Niutono – Leibnico formulė:

Jei funkcija $f(x)$ tolydi atkarpoje $[a; b]$ ir $F(x)$ - kuri nors jos pirmyktė funkcija šioje atkarpoje, tai

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Apskaičiuokite integralus taikydami Niutono – Leibnico formulę:

$$\int_1^2 \sqrt[3]{\ln(x)} d(\ln x); \quad \int_1^e \frac{dx}{x(1 + \ln^2 x)}; \quad \int_{-1}^0 \frac{x + 2}{x^2 + 2x + 2} dx.$$

APIBRĖŽTINIO INTEGRALO SAVYBĖS

- Vidutinės reikšmės teorema.**

Jei funkcija $f(x)$ tolydi atkarpoje $[a; b]$, tai egzistuoja tos atkarpos taškas c , kuriame

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a)$$

Iš čia

$$f(c) = \frac{1}{(b - a)} \int_a^b f(x)dx$$

čia $f(c)$ – vidutinė f -jos $f(x)$ reikšmė atkarpoje $[a; b]$.

Užduotis: Apskaičiuokite f -jos vidutinę reikšmę

$$f(x) = 10 + 2 \sin x + 3 \cos x, [0; 2\pi].$$

Kintamųjų keitimo metodas

Tarkime kad, integrale $\int_a^b f(x)dx$ kintamasis x pakeistas

pagal formulę $x = \varphi(t)$. Jeigu:

1. $f(x)$ tolydi $[a; b]$
2. $\varphi(t)$ ir $\varphi'(t)$ tolydžios atkarpoje $[a; b]$
3. $\varphi(t)$ reikšmių aibė yra atkarpa $[a; b]$, be to $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, tai

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Apskaičiuoti: $\int_5^{13} \frac{x dx}{\sqrt{x-4}}$

Integravimas dalimis

Sakykime, kad $u(x)$ ir $v(x)$ - diferencijuojamos atkarpoje $[a; b]$ funkcijos. Tuomet

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

Apskaičiuoti:

1) $\int_0^{2\pi} x^2 \cos x \, dx$

2) $\int_1^e x \ln x \, dx$

APIBRĖŽTINIO INTEGRALO SKAIČIAVIMAS

Integralai

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!}, & n - \text{nelyginis} \\ \frac{(n-1)!!}{n!!} \frac{\pi}{2}, & n - \text{lyginis} \end{cases}$$

Apskačiuokime:

1) $\int_0^{\pi/2} \sin^5 x dx$

2) $\int_0^{\pi} \sin^4 \frac{x}{2} dx$

APIBRĖŽTINIO INTEGRALO SKAIČIAVIMAS

SIMETRINIAI RĖŽIAI

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{jei } f(x) - \text{nelyginė} \\ 2 \int_0^a f(x) dx, & \text{jei } f(x) - \text{lyginė} \end{cases}$$

Apskaičiuoti:

1) $\int_{-7}^7 \frac{x^4 \sin x}{x^6 + 2} dx ;$

2) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^5 + 3x^3 - 7x + 3}{\cos^2 x} dx ;$

ktu

kauno
technologijos
universitetas

1922

MEDŽIAGA GALIMA RASTI:
WWW.TANY.LT/STUD
MATEMATIKA2

PARENGĖ: TATJANA SIDEKERSKIENE

E-MAIL: TATJANA.SIDEKERSKIENE@KTU.LT