

ktu

kauno
technologijos
universitetas

1922

9 PASKAITA

2015METAI

NETIESIOGINIAI INTEGRALAI

Netiesioginiai integralai yra 2 tipų:

- su begaliniais rėžiais
- trūkių f-jų

SU BEGALINIAIS RĖŽIAIS

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} F(b) - F(a)$$

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx$$

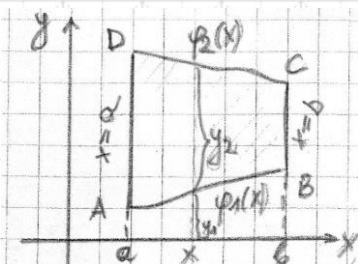
Sprendžiant uždavinius sakoma: jei egzistuoja tokia integralo baigtinė riba, tai netiesioginis integralas **konverguoja**, jei ne – **diverguoja**.

Užduotis:

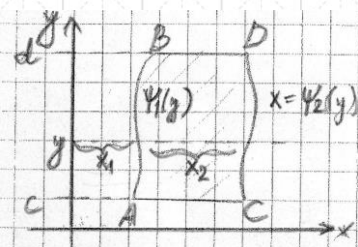
$$1) \int_2^{\infty} \frac{dx}{x \cdot \ln^2 x}; \quad 2) \int_{-\infty}^{-2} \frac{dx}{x^2}; \quad 3) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 6x + 10}; \quad 4) \int_0^{+\infty} e^{2x} dx; \quad 5) \int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{4 + x^6};$$

DVILYPIO INTEGRALO RĖŽIŲ NUSTATYMAS

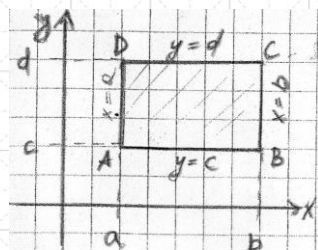
Dvilypių integralų apskaičiavimas, pakeičiamas nuoseklių dviejų apibrėžtinių (vienalypių) integralų apskaičiavimui.



$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy$$



$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx$$



$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx$$

Jei integravimo sritis nepriklauso nei vienam iš jau nagrinėtų tipų, tai ją tiesėmis

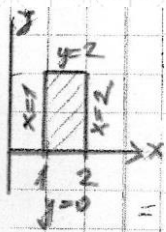
lygiagrečiomis koordinatų ašims skaidome į sritis $\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \dots + \iint_{D_n} f(x, y) dx dy$

DVILYPIO INTEGRALO RĖŽIŲ NUSTATYMAS

1 Užduotis. Apskaičiuoti $I = \int_0^1 dx \int_x^1 (x+y) dy$

2 Užduotis.

Apskaičiuoti $\iint_D (x+y^3) dx dy$ srityje D , apribotoje tiesių $x=1, x=2, y=0, y=2$.



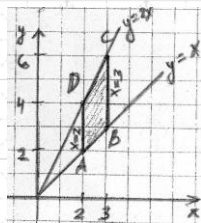
Sprendimas.

Kadangi rėžiai pastovūs, integruoti pagal x ar y – nesvarbu.

$$I = \int_1^2 dx \int_0^2 (x+y^3) dy = \int_1^2 \left(xy + \frac{y^4}{4} \right) \Big|_0^2 dx = \int_1^2 (2x+4) dx = \left(x^2 + 4x \right) \Big|_1^2 = 12 - 5 = 7$$

3 Užduotis.

Apskaičiuoti $\iint_D (x+2y) dx dy$, kai sritį riboja tiesės $y=x, y=2x, x=2, x=3$.

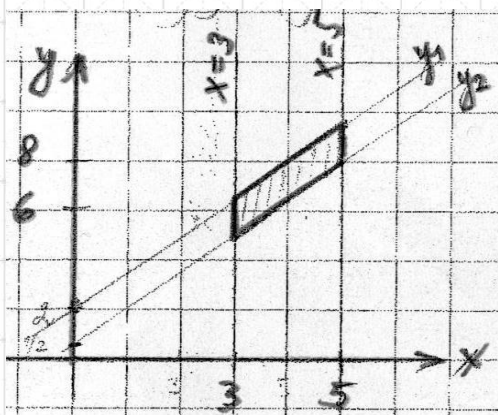


$$D = \{(x, y) \mid 2 \leq x \leq 3, x \leq y \leq 2x\}$$

$$ATS: \quad \frac{76}{3}$$

DVILYPIO INTEGRALO RĖŽIŲ NUSTATYMAS

- integravimo sritis – lygiagretainis



$$x=3, x=5$$

$$3x - 2y + 4 = 0$$

$$3x - 2y + 1 = 0$$

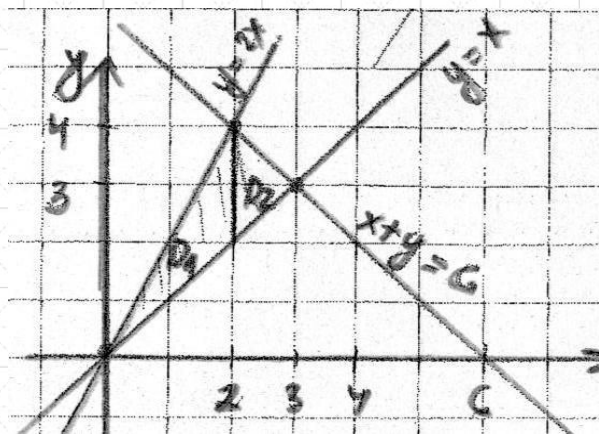
$$y_1 = \frac{3x+4}{2}$$

$$y_2 = \frac{3x+1}{2}$$

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_3^5 dx \int_{\frac{3x+1}{2}}^{\frac{3x+4}{2}} f(x, y) dy$$

DVILYPIO INTEGRALO RĖŽIŲ NUSTATYMAS

- integravimo sritis – trikampis

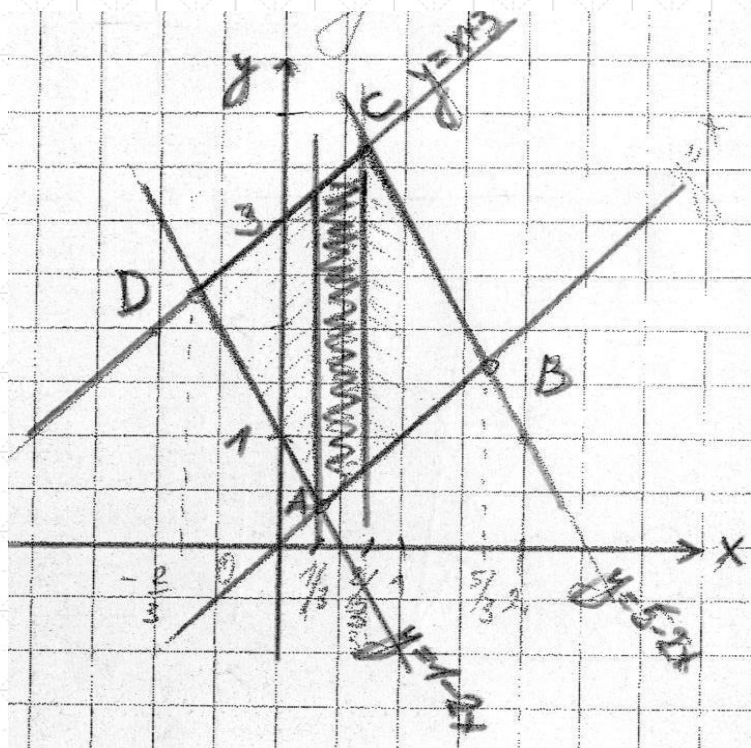


$$y=x, y=2x$$
$$x+y=6$$

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^2 dx \int_x^{2x} f(x, y) dy + \int_2^3 dx \int_x^{6-x} f(x, y) dy$$

DVILYPIO INTEGRALO RĖŽIŲ NUSTATYMAS

- integravimo sritis – lygiagretainis



$$y = x, y = x + 3$$

$$y = -2x + 1, y = -2x + 5$$

$$A: \begin{cases} y = x \\ y = 1 - 2x \end{cases} \quad x = \frac{1}{3}$$

$$B: \begin{cases} y = x \\ y = 5 - 2x \end{cases} \quad x = \frac{5}{3}$$

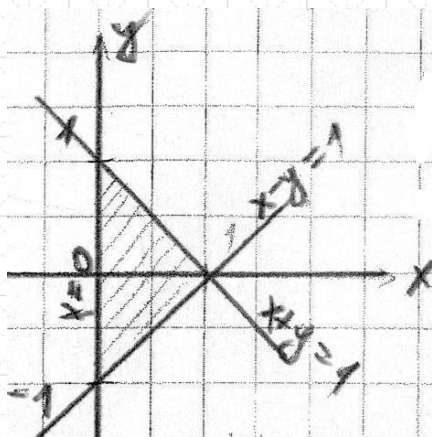
$$C: \begin{cases} y = x + 3 \\ y = 5 - 2x \end{cases} \quad x = \frac{2}{3}$$

$$D: \begin{cases} y = x + 3 \\ y = 1 - 2x \end{cases} \quad x = \frac{-2}{3}$$

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{-\frac{2}{3}}^{\frac{1}{3}} dx \int_{1-2x}^{x+3} f(x, y) dy + \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} dx \int_x^{x+3} f(x, y) dy + \int_{\frac{2}{3}}^{\frac{5}{3}} dx \int_x^{5-2x} f(x, y) dy$$

DVILYPIO INTEGRALO RĖŽIŲ NUSTATYMAS

- sritis gali būti užrašoma nelygybių pagalba



$$D: x - y \leq 1$$

$$x + y \leq 1$$

$$x \geq 0$$

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^1 dx \int_{x-1}^{1-x} f(x, y) dy = \int_{-1}^0 dy \int_0^{1+y} f(x, y) dx + \int_0^1 dy \int_0^{1-y} f(x, y) dx$$

INTEGRAVIMO TVARKOS PAKEITIMAS

SAVARANKIŠKAI IŠ KONSPEKTO

ktu

kauno
technologijos
universitetas

1922

MEDŽIAGA GALIMA RASTI:
WWW.TANY.LT/STUD
MATEMATIKA2

PARENGĖ: TATJANA SIDEKERSKIENE

E-MAIL: TATJANA.SIDEKERSKIENE@KTU.LT